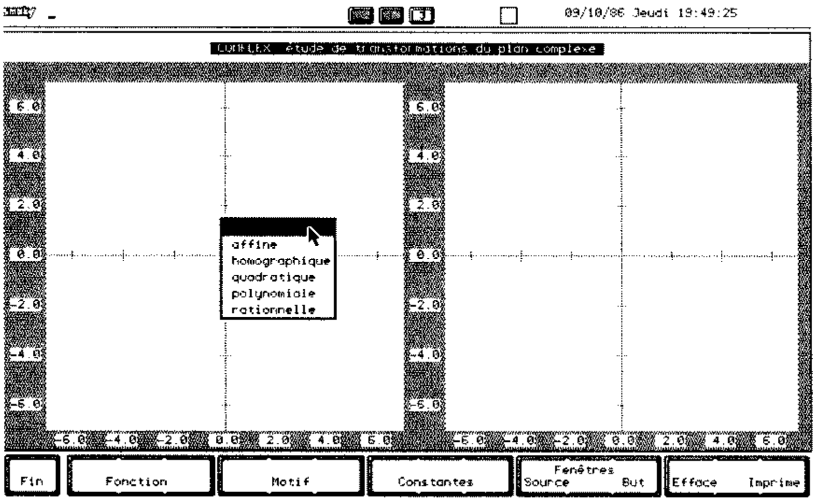
SMAKY NEWS

Le 5 janvier 1987 No 37

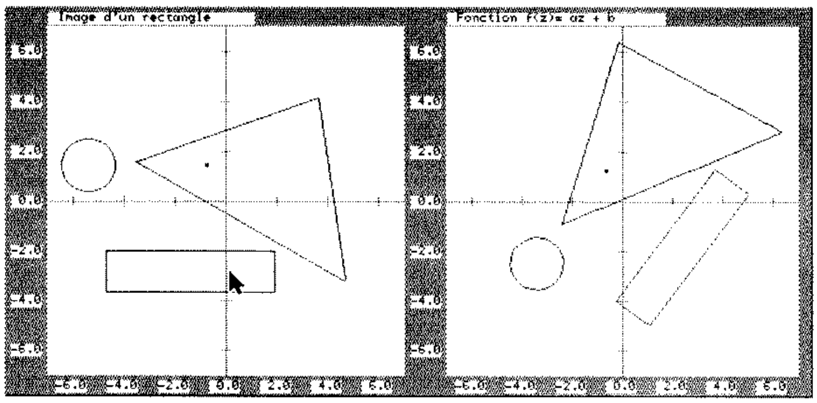
COMPLEX, didacticiel de M.-Y. Bachmann

1. Introduction



L´étude des fonctions complexes est rendue difficile par l´impossibilité d´en tracer le graphe. En effet, ce dernier est naturellement plongé dans un espace à quatre dimensions !
Le didacticiel COMPLEX permet une étude visuelle des transformations du plan qui sont données par des fonctions complexes simples.
Il est ainsi possible d´étudier des fonctions polynomiales du premier, deuxième et troisième degré, et des fonctions rationnelles dont le dénominateur a un degré un.

Fig. 1: présentation de l´écran



Pour l´analyse d´une fonction complexe choisie, deux copies du plan de Gauss sont représentées simultanément à l´écran. L´une, le plan source, contient les motifs dessinés par l´utilisateur, tandis que l´autre, le plan but, montre les images de ces motifs par la fonction.

Fig. 2: la transformation est ici une rotation

2. Le système COMPLEX

Les touches fonction du clavier affichent en permanence le menu principal du système. L´emploi du logiciel passe nécessairement par le choix de la fonction à étudier et par celui du motif à transformer. Selon les spécificités d´une situation choisie, il est souvent nécessaire de modifier l´échelle de représentation dans les deux plans source et but.

2.1 Aiguillage de base

Les touches fonction et la souris donnent accès aux menus déroulants qui permettent de déterminer les paramètres du logiciel.

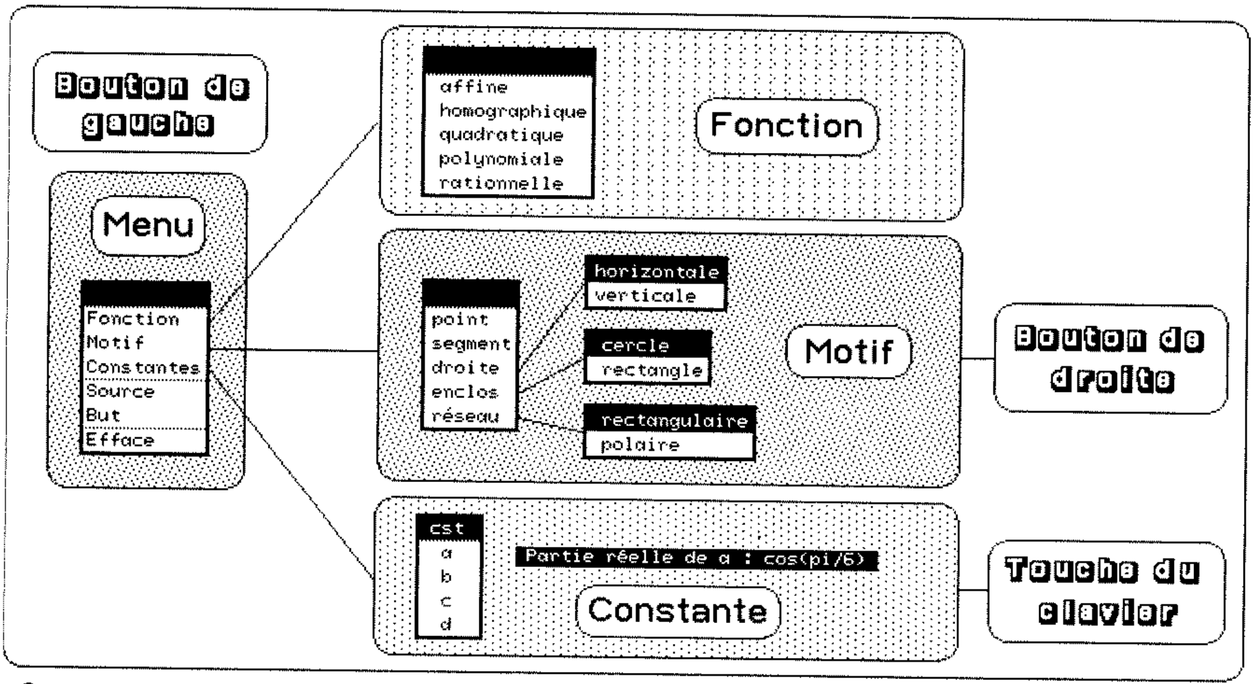


Fig. 3: organigramme des choix principaux

Quelques **accès directs** permettent de simplifier la modification des paramètres principaux:

- en pressant le bouton de droite de la souris, le menu des motifs apparaît directement.
- en tapant au clavier l´une des quatre touches a, b, c ou d, la valeur de la constante complexe correspondante est immédiatement demandée.

Comme le montre la figure ci-dessus, toute expression numérique écrite en BASIC est alors acceptée.

2.2 Le dessin des motifs

Le bouton de gauche permet de dessiner le motif présélectionné lorsque la souris est placée dans la fenêtre du plan source. Selon le motif retenu, le tracé s´obtient de manière différente:

- **point** cliquer pour poser un point.
- **segment** presser sur une extrémité, tirer le segment et lâcher sur l´autre extrémité.
- **droite** presser et tirer pour choisir la position de la droite, puis lâcher.
- **enclos** cercle presser sur le centre, tirer pour choisir le rayon puis lâcher.
  rectangle presser sur un sommet, tirer le sommet opposé puis lâcher.
- **réseau** cliquer une seule fois pour dessiner entièrement le quadrillage ou le réseau polaire.

2.3 La gestion de l´écran

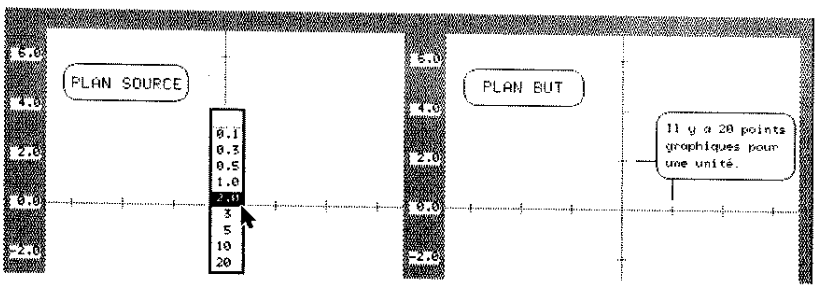
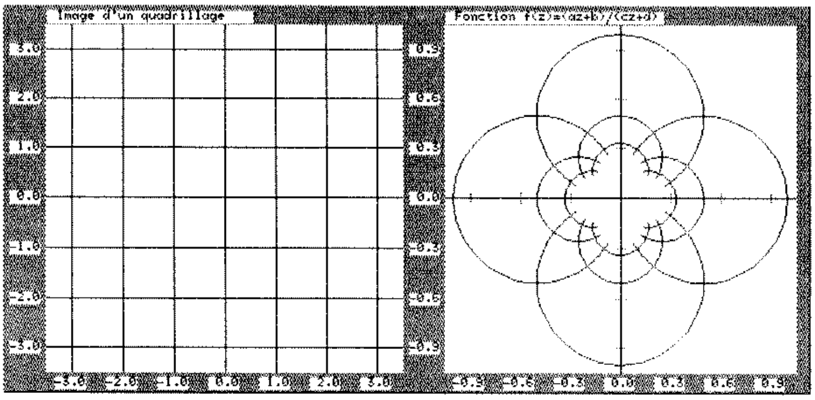


Fig. 4: modification de la représentation standard

On peut changer la représentation à l´écran, en modifiant l´échelle dans chacune des fenêtres. Cela se fait en choisissant une unité dans un menu déroulant placé au centre de la fenêtre concernée. Pour pouvoir annoter convenablement les graduations, un choix de 9 possibilités est à disposition.

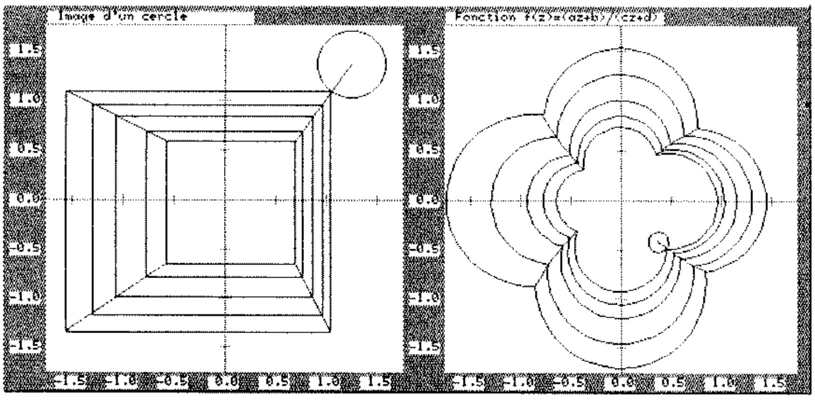
3. Exemples d'utilisation

3.1 La fonction homographique f(z)=1/z



La transformation géométrique correspondante à cette fonction est la composition d'une inversion et d'une symétrie.
Comme toutes les fonctions homographiques, cette fonction transforme un cercle ou une droite en un cercle ou une droite. D'autre part la transformation est conforme, c'est-à-dire qu'elle conserve les angles.

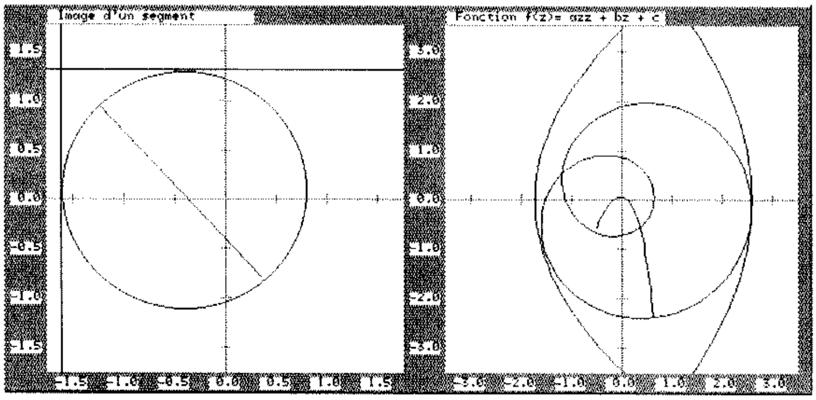
Fig. 5: des droites orthogonales deviennent des cercles orthogonaux



La figure suivante montre comment l'intérieur et l'extérieur du cercle unité sont inversés par une inversion-symétrie. On observera par exemple ce que deviennent les segments et le petit cercle extérieur.

Fig. 6: inversion-symétrie

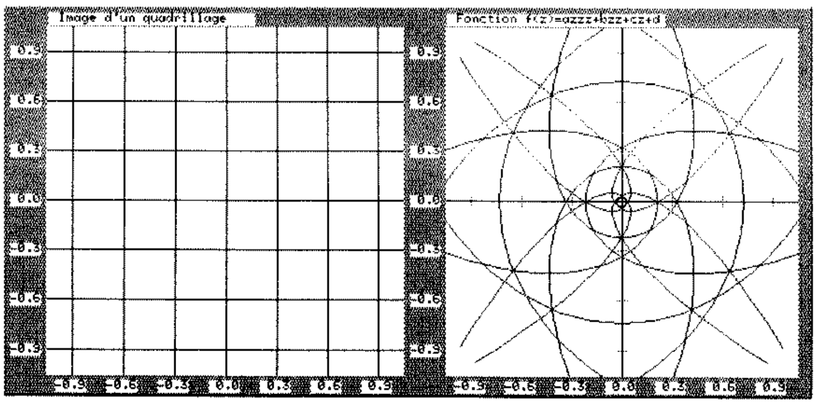
3.2 La fonction quadratique $f(z)=z^2$



Par cette transformation les droites deviennent des paraboles et les cercles des limaçons de Pascal. Tant que l'on observe un autre point que l'origine, la transformation est conforme. L'origine est un point critique d'ordre 2 car l'image d'un tracé simple autour de l'origine du plan source fait 2 fois le tour de l'origine dans le plan but.

Fig. 7: paraboles et limaçon de Pascal

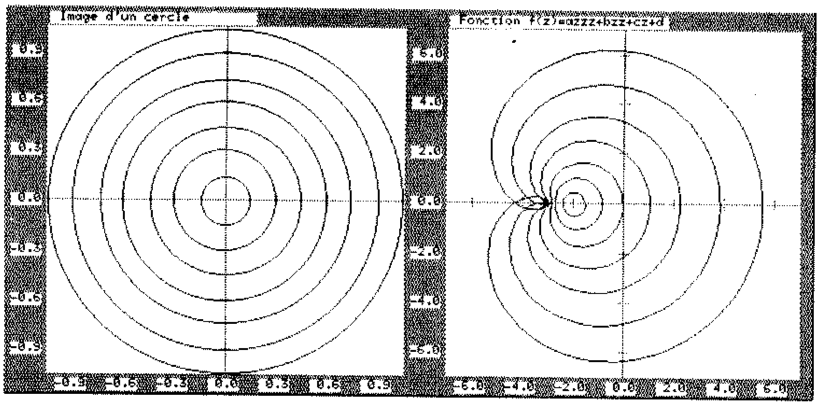
3.3 La fonction polynomiale $f(z) = z^3$



Elle présente un point critique d'ordre 3 à l'origine. Partout ailleurs, elle est conforme.

Fig. 8: image d'un quadrillage par la fonction $f(z)=z^3$

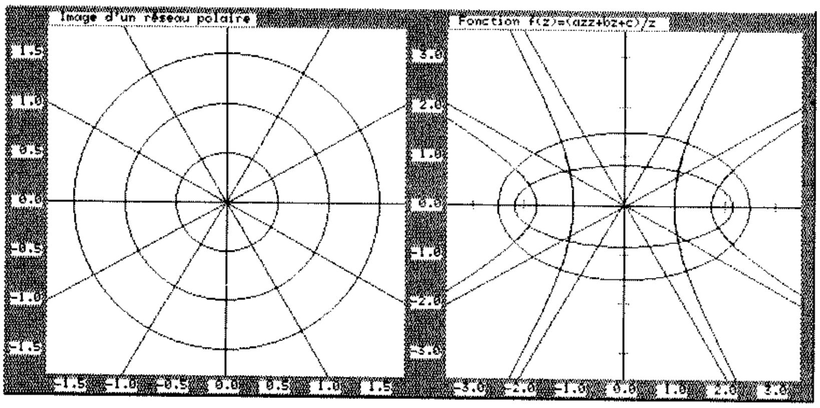
3.4 La fonction polynomiale $f(z)=(z+1)^3-3$



Elle présente un unique point critique en z=-1. L'ordre de ce point est 3 ce qui n'est pas évident sur la figure ci-contre.

Fig. 9: image de cercles par la fonction $f(z)=(z+1)^3-3$

3.5 La fonction rationnelle $f(z) = z + 1/z$



La transformation présente deux points critiques d'ordre 2 en z=1 et z=-1. Les deux dernières figures montrent bien que les angles en ces points sont modifiés.

Fig. 10: image d'un réseau polaire

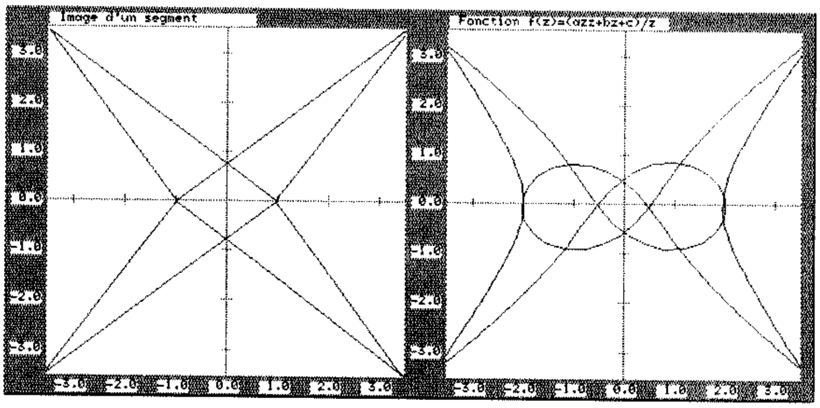


Fig. 11: La transformation n'est pas partout conforme

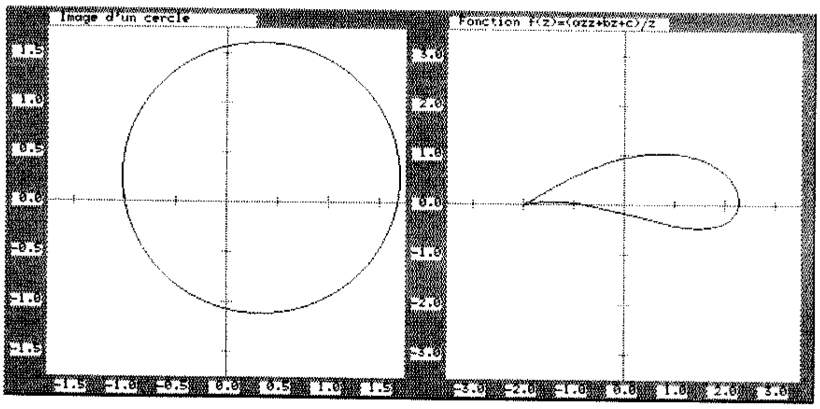


Fig. 12: Esquisse d'un profil d'avion